ARGUMENTOS Y SIGNIFICADOS ASOCIADOS A LA SERIE DE TAYLOR. PRODUCCIONES DE ESTUDIANTES DE NIVEL EDUCATIVO SUPERIOR

Landy Sosa Moguel, Cynthia Almazán Colorado
Universidad Autónoma de Yucatán (México)
smoguel@uady.mx, almazan.cc@hotmail.com

Resumen. En este artículo se presentan los argumentos discursivos y visuales formulados por estudiantes de nivel educativo superior al visualizar la Serie de Taylor con tecnología, así como los significados que construyeron sobre la Serie mediante sus argumentaciones. Las producciones de los estudiantes muestran que la predicción y aproximación son prácticas que, en actividades específicas de variación y cambio, promueven la generación de significados de la Serie en los estudiantes.

Palabras clave: serie de Taylor, calculadora, argumentos, significados

Abstract. In this article, we present the discursive and visual arguments formulated by superior educational level students when the Taylor Series is visualized with technology, and the meanings constructed about the Series through its arguments. The productions of the students show that the prediction and approximation are practices that, in specific activities of variation and change, promote the generation of meanings Series on students.

Key words: Taylor series, calculator, arguments and meanings

Introducción

Se presentan en este espacio los resultados correspondientes a un trabajo de investigación desarrollado con el propósito de reconocer los argumentos de presentación y justificación generados por estudiantes de nivel superior en actividades de visualización de la Serie de Taylor a través de tecnología. Así, se pretendían identificar los significados que ellos construyen sobre la Serie y obtener elementos a considerar para un tratamiento didáctico que favorezca su resignificación.

Marcolini y Perales (2005) reportan que coexisten dos modelos didácticos en la enseñanza actual de la Serie de Taylor, uno deviene de trabajos realizados por Newton, Euler y Laplace, donde la Serie lleva consigo un significado asociado a las ciencias experimentales y se construye de forma natural para gran variedad de problemas. El otro se deriva de trabajos realizados por Cauchy, en éstos la Serie es una consecuencia del concepto de límite y del teorema fundamental del Cálculo. Distante del significado y usos de la Serie, el segundo modelo es el que predomina mientras que el primero ha quedado rezagado de la enseñanza actual.

Para construir conceptos y procesos del Cálculo, como la Serie de Taylor, se precisa del desarrollo de nociones y estrategias variacionales (Marcolini y Perales, 2005), en la misma dirección Aparicio y Cantoral (2006), dan evidencia de que la generación de argumentos discursivos, gestuales y visuales de tipo variacional por parte del estudiante favorecen tal proceso de construcción. A este respecto, se ha observado que con el uso de la tecnología informática es posible que el estudiante genere argumentos al tiempo que desarrolla sus nociones y estrategias variacionales (Sánchez, 2006).

Método

El diseño experimental se llevó a cabo siguiendo la ingeniería didáctica como metodología de investigación. Se trabajó con un grupo de 6 estudiantes de nivel educativo superior de la Universidad Autónoma de Yucatán, estudiantes de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas. El instrumento tecnológico empleado por cada estudiante fue una calculadora graficadora.

En el diseño se consideraron aspectos didácticos asociados a la Serie de Taylor asociados al desarrollo del pensamiento variacional, tales como tareas para la construcción de gráficas, estableciendo relaciones entre el lenguaje algebraico y el gráfico (Duval, 1999; D'Amore, 2005); la necesidad de predecir y matematizar un fenómeno, como mecanismos de construcción de los saberes matemáticos de la variación y el cambio (Cantoral y Farfán, 1998); y los modelos de la analiticidad de la Serie de Taylor referidos a distintos contextos y momentos históricos (Cantoral, 2001).

Se pretendió generar argumentos sobre la Serie de Taylor, en particular tres formas de argumentación visual:

1. *Argumento geométrico-numérico*. Relacionado con la estrategia de diferencias finitas de variables, consiste en aproximar y estimar numéricamente un valor específico a partir de determinar geométricamente incrementos y decrementos entre variables.

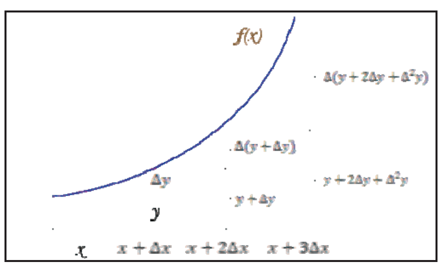


Imagen 1. Argumento geométrico-numérico

2. *Argumento algebraico.* Consiste en poder aproximar un valor específico de una función a partir de determinar algebraicamente los incrementos de las variables e identificar un patrón binomial de desarrollo. Como se muestra en la siguiente tabla:

Cambio en x	Cambio en y	
x	y	y
$x+\Delta x$	$y+\Delta y$	$y+\Delta y$
$x+2\Delta x$	$(y+\Delta y)+\Delta(y+\Delta y)$	$y+2\Delta y+\Delta^2 y$
$x+3\Delta x$	$(y+2\Delta y+\Delta^2 y)+\Delta(y+2\Delta y+\Delta^2 y)$	$y+3\Delta y+3\Delta^2 y+\Delta^3 y$
$\vdots$	$\vdots$	
$x+n\Delta x$	$y+n\Delta y+\frac{n(n-1)\Delta^2 y}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)\Delta^3 y}{2\cdot 3}+\cdots$	

Tabla 1. Desarrollo algebraico de las diferencias finitas de variables

3. *Argumento algebraico-gráfico.* Por medio de la representación gráfica de operaciones algebraicas se pueden aproximar funciones polinomiales.

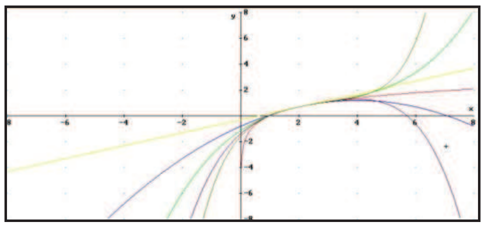


Imagen 2. Argumento algebraico-gráfico

Para construir diferentes significados sobre la Serie, en las actividades propuestas se consideraron estos argumentos y modelos de la analiticidad.

Uso de lenguaje variacional

Con respecto al lenguaje variacional de los estudiantes se observó el uso y presencia de las siguientes nociones, ideas y estrategias:

a) Noción de variación

Una evidencia de esta noción se observó en el momento que se generó una discusión tras la resolución del siguiente problema.

> Al lanzar un pequeño cohete para observaciones meteorológicas se tomaron mediciones de la posición del cohete, desde que se lanzó hasta ocho segundos después. Los datos recabados se presentan en la siguiente tabla:

Tiempo (t)	*Distancia (s)*
0	0
1	5.3125
2	6
3	4.1875
5	1.5625
6	5
7	14.4375
8	32

Instructor: ¿En qué intervalo de tiempo el cohete cambia de dirección?

E1: De 2 a 5 porque el cohete sube y luego baja, porque supuestamente cuando está subiendo va en una dirección y cuando baja esa dirección cambia.

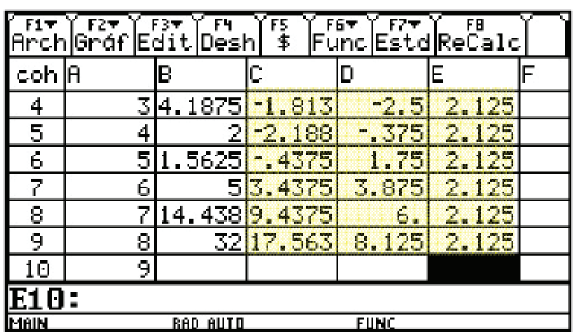
E2: ¿A qué se refieren con que "el cohete cambia de dirección"? Porque según yo, el cohete todo el tiempo cambia de dirección ya que no estamos hablando de una recta sino una curva. Porque lo que estamos midiendo es la posición con respecto al tiempo y si constantemente cambia de posición entonces cambia de dirección.

E1: Ah! Ya entendí tu punto. Como la gráfica no es constante, oscila mucho, entonces en cada intervalo de tiempo tiene cierta dirección, entonces cada que varía el tiempo cambia de dirección.

El estudiante E2 no está mirando la dirección como un "sentido definido" (Norte-sur, Este-Oeste), sino como la inclinación de las pendientes de las rectas tangentes a la curva, es por esta idea que E2 argumenta que la dirección cambia constantemente, esta es una evidencia de la presencia de la noción de variación y del uso de un lenguaje variacional.

b) Practica de predicción y Estrategia de diferencia finita de variables

Con el fin de predecir la posición de un cohete, un estudiante utilizó la estrategia de diferencia finita de variables hacia atrás:



F1 Arch | F2 Gráf | F3 Edit | F4 Desh | F5 $ | F6 Func | F7 Estd | F8 ReCalc

coh	A	B	C	D	E	F
4	3	4.1875	-1.813	-2.5	2.125	
5	4	2	-2.188	-.375	2.125	
6	5	1.5625	-.4375	1.75	2.125	
7	6	5	3.4375	3.875	2.125	
8	7	14.438	9.4375	6.	2.125	
9	8	32	17.563	8.125	2.125	
10	9					

E10:

MAIN RAD AUTO FUNC

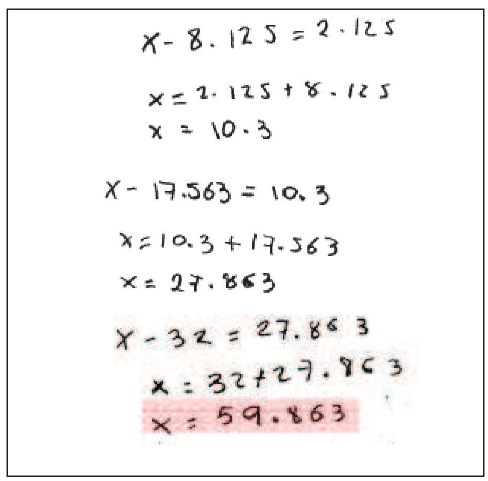


Imagen 3. Estrategia de diferencias finitas (izquierda) y su predicción (derecha)

En otro ejercicio se observó el intento de los estudiantes por utilizar esta estrategia para predecir la posición de una partícula, sin embargo tuvieron que optar por otro camino.

c) Practica de predicción y la aproximación numérica

Con el fin de predecir la posición de una partícula, un estudiante utilizó el teorema del valor medio como estrategia para aproximarse al valor buscado:

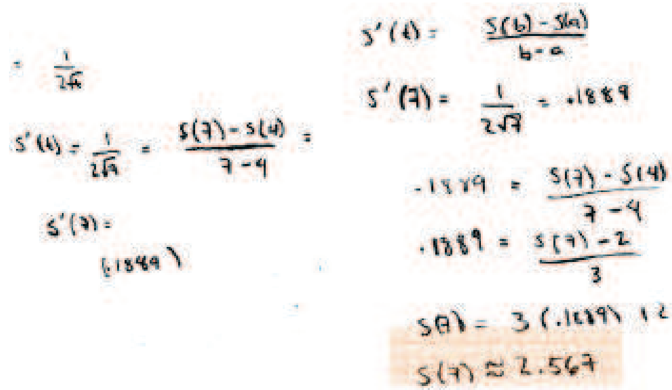


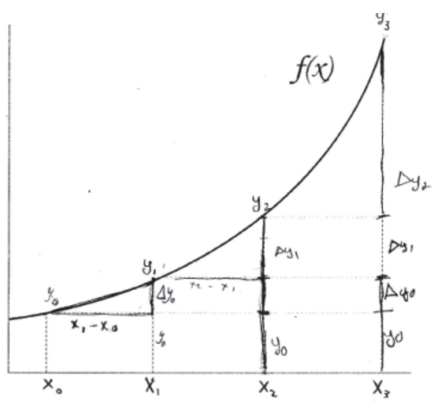
Imagen 4. Aproximación y predicción de la posición de una partícula

Es muy interesante notar que con esta idea el estudiante obtiene una expresión equivalente a la Serie de Taylor.

Argumentos y significados sobre la Serie de Taylor

a) Argumento geométrico-numérico

Un estudiante obtuvo el siguiente resultado al tratar de construir una expresión para predecir la posición de x_3 con el conocimiento del estado de x_1:



La expresión que según el estudiante predice la posición de x_3 es:

$$y_3 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2$$

Imagen 5. Argumento geométrico-numérico generado por un estudiante

Se puede observar en la gráfica que:

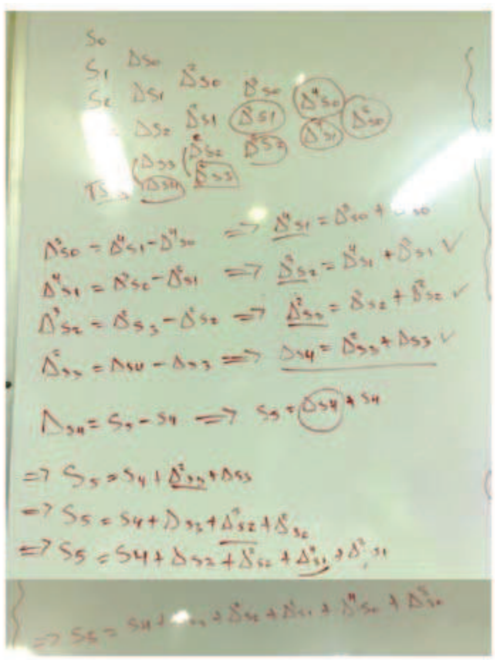
$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 \text{ y } y_2 = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1$$

Sustituyendo la primera expresión en la segunda se obtiene $y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$, sustituyendo ésta y la primera expresión en la que el estudiante construyó, se obtiene lo siguiente: $y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0$

Esta expresión es muy similar al desarrollo de diferencias finitas de Euler, si se continua este procedimiento, digamos hasta y_n, obtendremos el binomio de Newton y finalmente la serie de Taylor.

b) Argumento algebraico-numérico

A partir de un arreglo de diferencias un estudiante construyó una expresión binomial para predecir la posición inmediata.



La expresión que construyó el estudiante para predecir el valor de s_5 es:

$$s_5 = s_4 + \Delta s_3 + \Delta^2 s_2 + \Delta^3 s_1 + \Delta^4 s_0 + \Delta^5 s_0$$

Imagen 6. Argumento algebraico-numérico generado por los estudiantes

Procedamos a expresar s_5 en términos de s_0 de la misma forma que se realizó en el argumento geométrico. En este caso nos apoyaremos del siguiente arreglo:

$$
\begin{array}{cccccc}
s_0 & & & & & \\
 & \Delta s_0 & & & & \\
s_1 & & \Delta^2 s_0 & & & \\
 & \Delta s_1 & & \Delta^3 s_0 & & \\
s_2 & & \Delta^2 s_1 & & \Delta^4 s_0 & \\
 & \Delta s_2 & & \Delta^3 s_1 & & \Delta^5 s_0 \\
s_3 & & \Delta^2 s_2 & & \Delta^4 s_1 & \\
 & \Delta s_3 & & \Delta^3 s_2 & & \\
s_4 & & \Delta^2 s_3 & & & \\
 & \Delta s_4 & & & & \\
s_5 & & & & &
\end{array}
$$

De lo anterior podemos observar que:

$$s_1 = s_0 + \Delta s_0 \,,\; s_2 = s_1 + \Delta s_1 \,,\; s_3 = s_2 + \Delta s_2 \,,\; s_4 = s_3 + \Delta s_3$$

Si utilizamos estas expresiones realizando las sustituciones convenientes, obtenemos:

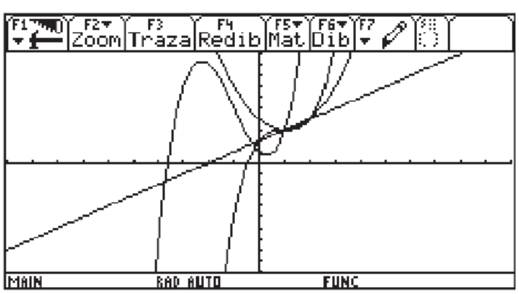
$$s_5 = s_0 + 5\Delta s_0 + 10\Delta^2 s_0 + 10\Delta^3 s_0 + 5\Delta^4 s_0 + \Delta^5 s_0$$

Es bastante evidente el desarrollo binomial en la última expresión. El resultado obtenido por este estudiante es una forma equivalente de la serie de Taylor. Si se continúa el proceso, digamos hasta s_n obtendríamos el desarrollo del binomio de Newton y finalmente la Serie de Taylor.

c) Argumento algebraico-gráfico

Este argumento fue generado en un ejercicio que consistía en construir una función polinomial que se aproximara gráficamente a la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ en el punto $x_0 = 1$. Se generaron dos tipos de resultados concernientes a la noción de "aproximación" que cada estudiante concibió:

1. Aproximación puntual



La expresión que el estudiante construyó para aproximar la función de forma puntual es:

$$f(x) = 3 + 7(x-1) + \frac{12(x-1)^2}{2} + \frac{6(x-1)^3}{6}$$

Imagen 7. Aproximación puntual en $x_0 = 1$

2. Aproximación global

En este argumento intervienen procesos cognitivos para construir con éxito la función correcta y junto con la integración tecnológica el estudiante pudo realizar acciones y estrategias como la integración de registros de representación algebraica, gráfica y numérica. También interviene la operación gráfica de funciones y sobre todo, lograron construir expresiones aproximadas a la función solicitada instrumentando la calculadora gráfica e interactuando con el significado de aproximación polinomial sumergido en la Serie.

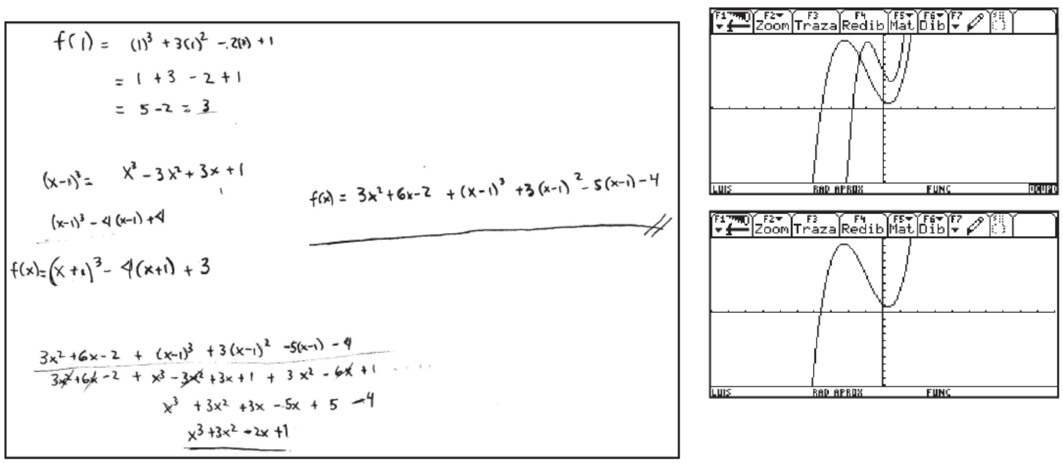


Imagen 8. Aproximación global de forma algebraica (izquierda) y grafica (derecha)

Conclusiones

La argumentación es un medio que permite a los estudiantes justificar una conjetura, resultado o idea, por ejemplo, justificar el proceso para aproximarse a un punto o a la posición de una partícula conociendo un estado ulterior de su posición. Asimismo, es un medio que favorece la construcción de nociones sobre un concepto o proceso matemático, en el caso de la Serie, los estudiantes reconocieron ésta como un proceso de aproximación para predecir el estado de un fenómeno a partir de datos iniciales.

Las producciones de los estudiantes dan evidencia de que la predicción y la aproximación son prácticas que, en actividades específicas de variación y cambio, promueven la construcción de significados de la Serie de Taylor en los estudiantes. En dichas actividades, la visualización con tecnología fue un elemento clave para analizar lo variacional y generar argumentos de justificación de resultados.

Referencias bibliográficas

Aparicio, E., Cantoral, R. (2006). Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, *9(1)*, 7-30.

Cantoral, R. (2001). *Matemática Educativa: Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, *14(3)*, 353 – 369

D'Amore, B. (2005*). Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de las Matemáticas*. México: Reverté.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Colombia: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(1), 25-68.

Sánchez, M. (2006). *Introducción a la derivada en un contexto tecnológico-variacional*. *Números* 64. Recuperado el 20 de Octubre de 2008 de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/64/ideas_02.pdf.